

1 Probabilités-Rappel

On lance un dé non truqué à six faces numérotées de 1 à 6 et on note le nombre figurant sur la face supérieure du dé.

Lancer ce dé et noter le nombre inscrit sur la face supérieure du dé est une expérience dont on ne peut prévoir le résultat. On parle *d'expérience aléatoire*.

Les différentes issues de l'expérience aléatoire s'appellent des **événements élémentaires**.

L'ensemble des événements élémentaires est appelé **univers**. On le note Ω .

Dans le cas du dé, on a : $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ où on note 1 l'événement "On a obtenu la face numérotée 1".

On a $\text{card } \Omega = 6$; ce qui signifie que le nombre d'éléments de Ω est 6.

Loi de probabilité sur un ensemble fini

On note $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ l'ensemble des événements élémentaires d'une expérience aléatoire.

Définir une loi de probabilité sur Ω , c'est associer à chaque événement e_i un nombre p_i (appelé probabilité de e_i) positif ou nul de telle façon que :

1. $\sum_{i=1}^n p_i = p_1 + \dots + p_n = 1$
2. La probabilité d'un événement A, notée $P(A)$, est la somme des probabilités p_i des événements élémentaires qui constituent A.

Exemple : A est "le chiffre obtenu est pair". On a : $A = \{2; 4; 6\}$ et $P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{3}{6}$ (si le dé est parfait).

Remarque : **Modéliser** une expérience aléatoire, c'est associer à cette expérience une loi de probabilité sur l'ensemble Ω des résultats possibles. Choisir un modèle dépend des conditions de l'expérience.

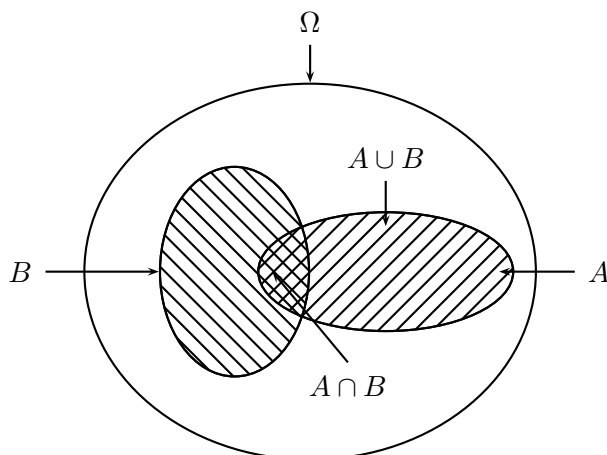
Cas particulier essentiel : l'équiprobabilité

Il se peut que les conditions de l'expérience conduise à choisir un modèle où les événements élémentaires ont tous la même probabilité.

Il s'agit d'un modèle dit " **d'équiprobabilité**". Si $\text{card } \Omega = n$, alors $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$.

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

2 Union - Intersection - Complémentaire



Expérience aléatoire :

On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

On considère les événements A et B suivants :

A : "La carte est un valet, une dame, ou un roi"

B : "La carte est un pique".

On a alors :

Ω est l'ensemble des cartes du jeu de 32 cartes.

$A \cup B$ est l'ensemble des cartes qui sont un pique ou une figure.

$A \cap B$ est formé des trois cartes : Le valet de pique, la dame de pique et le roi de pique.

Propriétés :

Soit A et B deux événements de Ω .

1. La probabilité de l'événement certain est 1 : $P(\Omega)=1$.
2. La probabilité de l'événement impossible est 0 : $P(\emptyset)=0$.
3. Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$.
4. $P(A \cup B)=P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
5. Si A et B sont incompatibles (c'est à dire $A \cap B = \emptyset$) alors $P(A \cup B)=P(A) + P(B)$.
6. $P(\bar{A})=1-P(A)$ ($\bar{A}$ désigne l'événement contraire de A .)

3 Probabilités conditionnelles

Exemple :

Dans un groupe de 100 personnes, 40% des garçons et 15% des filles mesurent plus de 1,80 m. De plus, 60% des élèves sont des filles.

Sachant qu'un élève choisi au hasard mesure plus de 1,80 m, quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

Solution :

On convient de noter : G pour "l'élève est un garçon" ; F pour "l'élève est une fille" ; T pour "l'élève a une taille qui dépasse 1,80 m" ; $\bar{T}$ pour "l'élève a une taille inférieure ou égale à 1,80 m" .

On peut organiser les données sous forme de tableau à double entrée.

	G	F	Total
$\bar{T}$	24	51	75
T	16	9	25
Total	40	60	100

Pour remplir les marges du tableau, on utilise l'information : "60% des élèves sont des filles".

Sur 100 personnes du groupe, cela donne 60 filles et donc 40 garçons.

Pour remplir la case du tableau correspondant à "garçon de plus de 1,80 m", on utilise l'information : "40% des garçons mesurent plus de 1,80 m". Sur 40 garçons, cela donne $40 \times 40/100$ ce qui fait 16 garçons de plus de 1,80 m et donc 24 garçons de taille inférieure à 1,80 m.

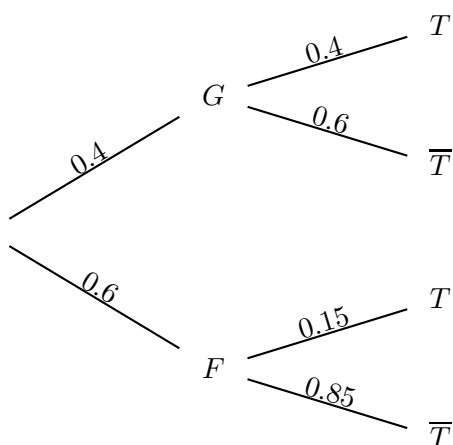
De même, on utilise "15% de filles mesurent plus de 1,80 m ; ce qui donne $60 \times 15/100$ donc 9 filles mesurent plus de 1,80 m et 51 filles ont une taille inférieure ou égale à 1,80 m.

On peut maintenant répondre à la question :

Pour cela on note **$P_T(F)$** la probabilité de F sachant T. On a : $P_T(F) = \frac{9}{25}$.

Ne pas confondre : $P(F \cap T)$ et $P_T(F)$. En effet $P(F \cap T) = \frac{9}{100}$ et $P_T(F) = \frac{9}{25}$.

On peut représenter la situation sous la forme d'un arbre de la façon suivante :

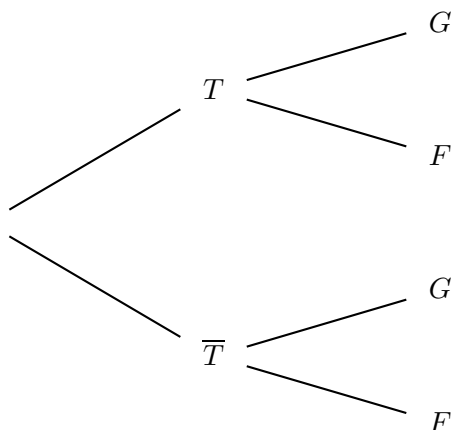


On écrit le long des "branches" de l'arbre les probabilités. En particulier sur la branche allant de G à T, on note la probabilité conditionnelle $P_G(T)$.

Et sur la branche allant de G à $\bar{T}$, on note la probabilité conditionnelle $P_G(\bar{T})$ qui est le complément à 1 de la précédente.

De même sur les "branches" partant de F.

On peut aussi fabriquer un deuxième arbre en le commençant par T et $\bar{T}$ comme ci- dessous :



Compléter ce deuxième arbre avec les probabilités qui conviennent sur les différentes "branches".

Il y a un lien entre $P(A \cap B)$ et $P_A(B)$. Cherchons ce lien. Raisonnons dans le cas d'équiprobabilité :

	A	$\bar{A}$	Total
B	$\text{card}(A \cap B)$		$\text{card}(B)$
$\bar{B}$			
Total	$\text{card}(A)$		$\text{card}(\Omega)$

On a : $P(A \cap B) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(\Omega)}$ et $P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)}$; d'où on peut déduire que :

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(B)} = P_B(A).$$

D'où :

Définition

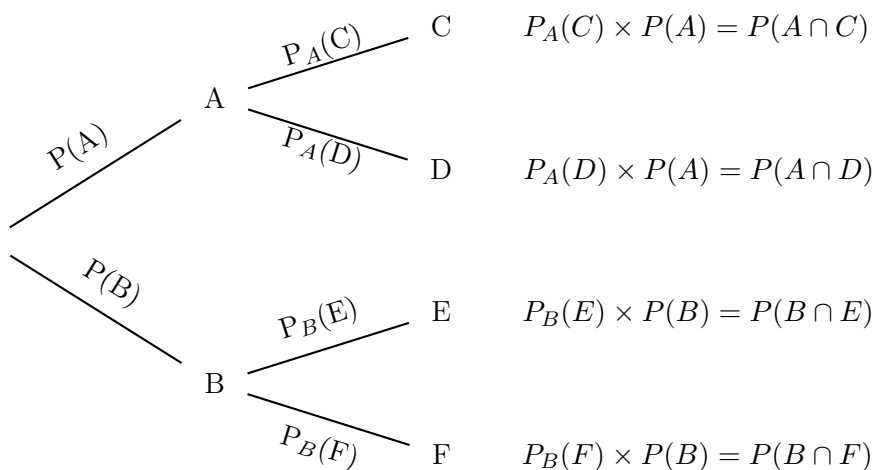
A et B étant deux événements quelconques de Ω avec $P(B) \neq 0$, $P_B(A)$ est la probabilité de l'événement A sachant que B est réalisé et :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Remarque :

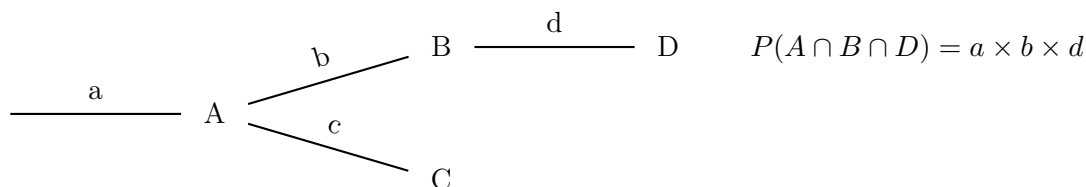
On a donc : $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$, mais aussi $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$.

Conséquence sur un arbre :



En suivant la première branche de l'arbre et en multipliant les deux probabilités, on obtient : $P_A(C) \times P(A)$ c'est à dire $P(A \cap C)$.

Cette propriété se généralise même si l'arbre a plusieurs niveaux de branches. Par exemple :



Un exemple simple :

Une boîte contient 5 boules : 2 blanches et 3 noires.

On extrait au hasard deux boules successivement sans remise.

On peut faire un arbre pour représenter la situation.

On note "B" : "On a extrait une boule blanche."

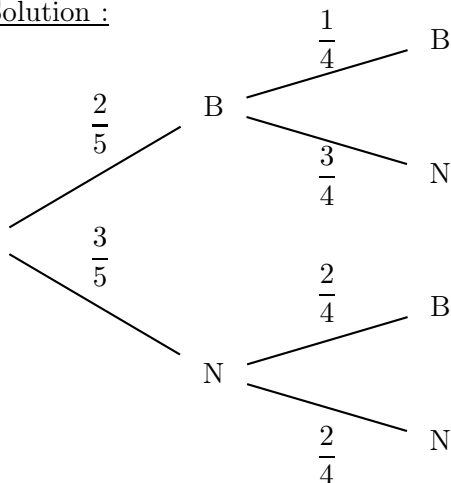
On note "N" : "On a extrait une boule noire."

On note E l'événement : "Les deux boules extraites sont blanches"

On note F l'événement : "Les deux boules extraites sont noires"

On note G l'événement : "Les deux boules extraites sont de couleurs différentes"
 Calculer $P(E)$, $P(F)$ et $P(G)$.

Solution :



On a :

$$P(E) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}.$$

$$P(F) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}.$$

$$P(G) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20} + \frac{6}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

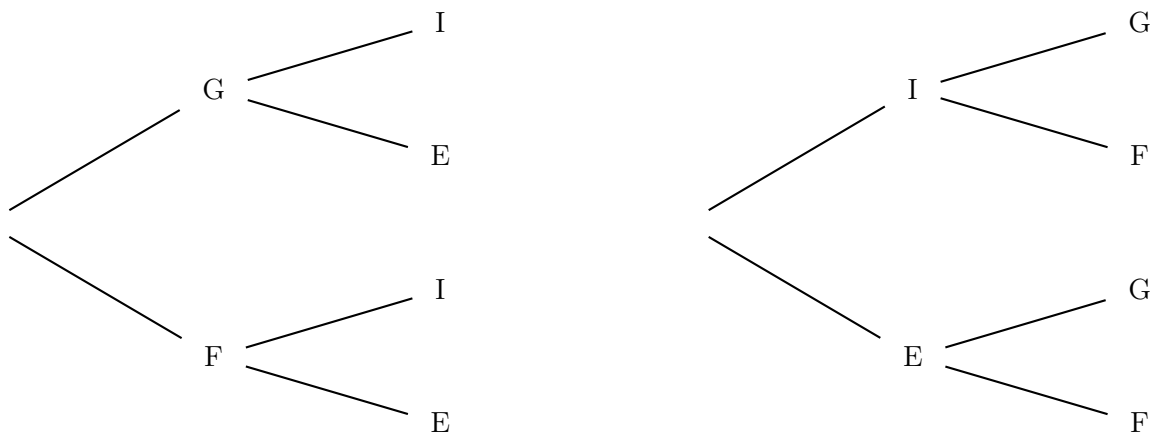
Un autre exemple :

Dans un lycée, 55% des élèves sont des garçons dont 60% sont internes et 40% externes.
 45% des élèves du lycée sont des filles dont 30% sont internes et 70% sont externes.

1. Faire les deux arbres possibles.
2. On choisit un élève au hasard.
 - a) Compléter les arbres par les probabilités connus. Puis, on complètera les arbres au fur et à mesure des résultats.
 - b) Sachant que l'élève choisi au hasard est interne, quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

Solution :

On note E : « l'élève choisi est externe » ; I : « l'élève choisi est interne » ;
 G : « l'élève choisi est un garçon » ; F : « l'élève choisi est une fille » ;



On va calculer $P(I)$. Pour cela, on utilise l'arbre de gauche de la façon suivante :

$$\left. \begin{array}{l} P(G \cap I) = P_G(I) \times P(G) = \dots\dots\dots \\ P(F \cap I) = P_F(I) \times P(F) = \dots\dots\dots \end{array} \right\} P(G \cap I) + P(F \cap I) = P(I) = \dots\dots\dots$$

Le résultat précédent permet alors de compléter partiellement l'arbre de droite.

La probabilité cherchée peut s'écrire $P_I(F)$. Elle correspond à la deuxième branche du deuxième arbre.

On la calcule ainsi :

$$P_I(F) = \frac{P(I \cap F)}{P(I)} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \simeq \dots\dots$$

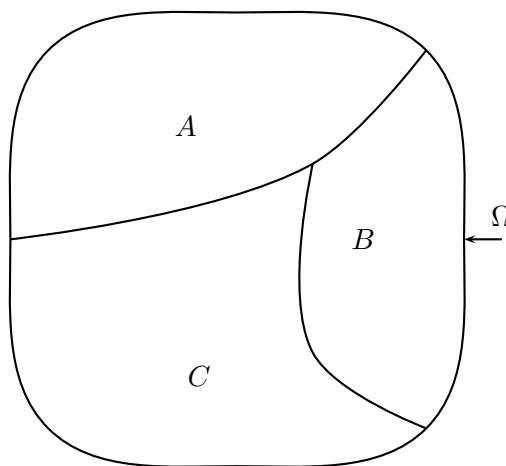
On peut ainsi compléter une branche du deuxième arbre. Pour cela, on a utilisé une formule nommée « formule des probabilités totales ».

4 Formule des probabilités totales

Partition de Ω

Trois parties A , B , C de Ω constituent une partition de Ω si on a :

$$A \cap B = \emptyset, A \cap C = \emptyset, B \cap C = \emptyset \text{ et } A \cup B \cup C = \Omega$$



Exemple de partition :

On considère l'ensemble Ω des cartes d'un jeu de 32 cartes.

A est l'ensemble des cartes de trèfle; B l'ensemble des cartes de pique; C l'ensemble des cartes de couleur rouge

Les ensembles A , B et C constituent une partition de Ω .

Formule des probabilités totales

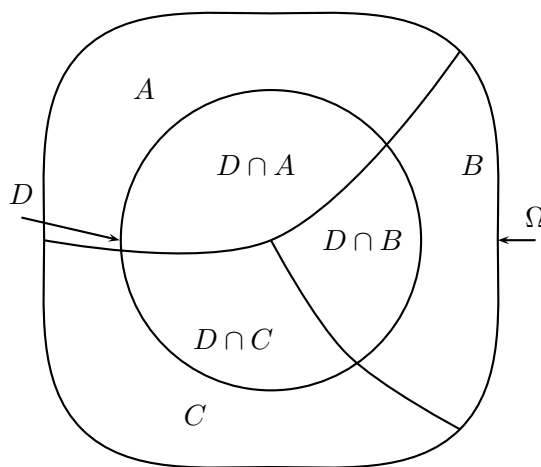
Soit A , B , C une partition de Ω et D un événement de Ω .

Alors on a :

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C)$$

$$P(D) = P_A(D) \times P(A) + P_B(D) \times P(B) + P_C(D) \times P(C)$$

Remarque : On peut appliquer cette formule avec une partition de plus de trois parties.



Exemple :

Un sac contient 10 boules dont 2 blanches, 3 rouges et 5 noires. On procède au tirage, au hasard, successivement et sans remise de deux boules.

Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage.

Solution :

Notons B_2 l'événement « on a obtenu une boule blanche au deuxième tirage ».

Notons B_1 l'événement « on a obtenu une boule blanche au premier tirage ».

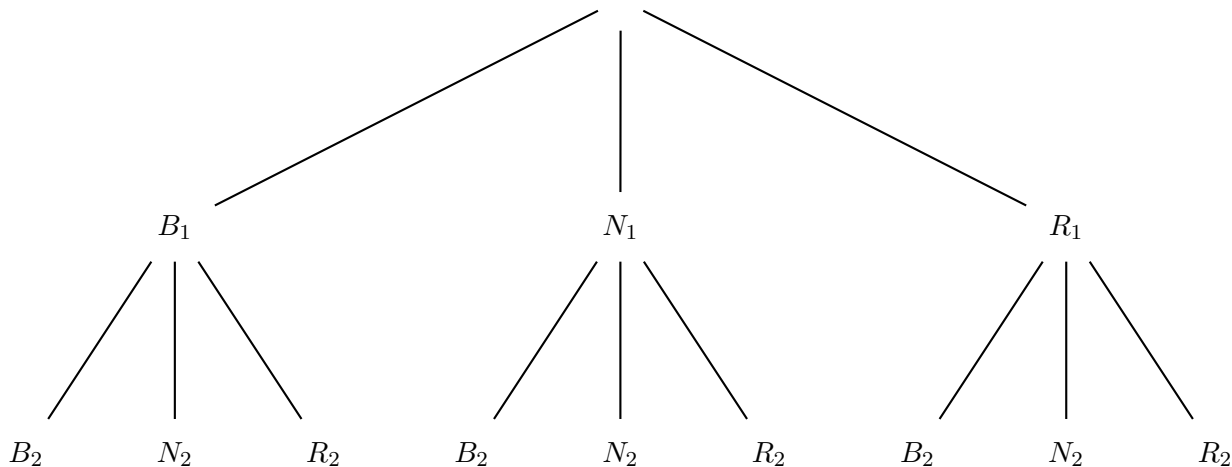
Notons R_2 l'événement « on a obtenu une boule rouge au deuxième tirage ».

Notons R_1 l'événement « on a obtenu une boule rouge au premier tirage ».

Notons N_2 l'événement « on a obtenu une boule noire au deuxième tirage ».

Notons N_1 l'événement « on a obtenu une boule noire au premier tirage ».

On peut faire un arbre en tenant compte de l'ordre des tirages.



$$P(B_2) = P(B_2 \cap B_1) + P(B_2 \cap N_1) + P(B_2 \cap R_1)$$

$$P(B_2) = P_{B_1}(B_2) \times P(B_1) + P_{N_1}(B_2) \times P(N_1) + P_{R_1}(B_2) \times P(R_1)$$

$$P(B_2) = \dots\dots\dots$$

Remarque : Les deux probabilités $P(B_2)$ et $P_{B_1}(B_2)$ sont différentes.
 Les deux événements B_1 et B_2 ne sont pas indépendants.

5 Calcul de probabilités avec un tableau (exercice bac Réunion juin 2008)

Une entreprise comprend 375 salariés. Elle dispose d'un restaurant d'entreprise.
 Une enquête a été réalisée sur la fréquentation de ce restaurant par les salariés de cette entreprise.
 Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous.

	Hommes	Femmes	Total
Nombre de salariés qui mangent régulièrement au restaurant d'entreprise	110	55	165
Nombre de salariés qui mangent occasionnellement au restaurant d'entreprise	42	33	75
Nombre de salariés qui ne mangent jamais au restaurant d'entreprise	58	77	135
Nombre total de salariés	210	165	375

On choisit au hasard un salarié dans la liste des 375 salariés de cette entreprise. Tous les salariés ont la même probabilité d'être choisis.

On considère les événements suivants :

F : « Le salarié choisi est une femme » ;

R : « Le salarié choisi mange régulièrement au restaurant d'entreprise » ;

O : « Le salarié choisi mange occasionnellement au restaurant d'entreprise ».

- Traduire par une phrase l'événement $F \cap R$, puis calculer sa probabilité (arrondir le résultat au millième).
- Traduire par une phrase l'événement $R \cup O$, puis calculer sa probabilité.
- Calculer la probabilité que, sachant qu'il mange occasionnellement au restaurant d'entreprise, le salarié choisi soit une femme (donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible).

Réponses :

- $F \cap R$ est l'événement : « La personne choisie est une femme qui mange régulièrement au restaurant ».

$$p(F \cap R) = \frac{55}{375} = \frac{11}{75} \approx 0,147$$

2. $R \cup O$ est l'événement : « manger régulièrement ou occasionnellement au restaurant ».

$$p(R \cup O) = \frac{165 + 75}{375} = \boxed{\frac{16}{25} = 0,64}$$

3. $p_O(F) = \frac{33}{375} = \boxed{\frac{11}{125}}$ (directement) ou $p_O(F) = \frac{p(F \cap O)}{p(O)} = \frac{\frac{33}{375}}{\frac{75}{375}} = \frac{33}{375} = \frac{11}{125}$.